Solution 20 :

1°/ ABC est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

Conclusion : ABC est équilatéral de sens direct si et seulement si

$$c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

2°/ ABC est un triangle équilatéral de sens indirect si et seulement si :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

Conclusion : ABC est équilatéral de sens indirect si et seulement si

$$c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

3°/ ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ ou

$$c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow \left[(c-a) - e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right]\cdot\left[(c-a) - e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)\right] = 0$$

$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}} - (b-a)(c-a)e^{i\frac{\pi}{3}} + (b-a)^2 = 0$$